

超幾何級数 $F(1/6, 1/2, 1; x)$ で表されるある種の極限定理の代数幾何学的側面

中野 竜之介¹ 松本 圭司²

¹ 北海道大学大学院理学院

² 北海道大学大学院理学研究院



上の QR コードから該当の講演スライドが閲覧できます.

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです.

設定と主結果 I

目標. Gauss の算術幾何平均の枠組み (楕円曲線の周期・テータ定数・超幾何級数) を $F(x) = F(1/6, 1/2, 1; x)$ の場合に展開する.

Gauss の算術幾何平均

$a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ の共通極限は

$$M_G(a_0, b_0) = \frac{a_0}{F(1/2, 1/2, 1; 1 - (b_0/a_0)^2)}.$$

Legendre 族の楕円曲線では, Jacobi の周期公式

$\vartheta_{00}(\tau(x))^2 = F(1/2, 1/2, 1; x)$, $\tau(x) = \sqrt{-1}F(1/2, 1/2, 1; 1-x)/F(1/2, 1/2, 1; x)$ が周期・テータ定数・超幾何級数を結ぶ. 反復 1 回は $\tau \mapsto 2\tau$ に対応し, テータ定数の 2 倍公式

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)$$

が $(\vartheta_{00}(\tau)^2, \vartheta_{01}(\tau)^2)$ の相加・相乗平均を与える (J. M. Borwein and P. B. Borwein 1998 参照).

$F(x)$ は種数 3 の巡回曲線の周期に現れ, その対合による商は楕円曲線となる.

設定と主結果 II

$S(a, b) = \sqrt{(a^2 + ab + b^2)/3}$ とおき

$$M_1(a, b) = \frac{1}{4} \left[\frac{a+b}{2} + 3S(a, b) + \sqrt{-1}\sqrt{3} \left(\frac{a+b}{2} - S(a, b) \right) \right],$$

$$M_2(a, b) = \frac{1}{4} \left[\frac{a+b}{2} + 3S(a, b) - \sqrt{-1}\sqrt{3} \left(\frac{a+b}{2} - S(a, b) \right) \right].$$

$(a_0, b_0) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ に対し $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (M_1(a_n, b_n), M_2(a_n, b_n))$ と反復する. $\sqrt{-1}\sqrt{3}$ を含むので $n \geq 1$ の項は一般に複素数だが, $b_n = \overline{a_n}$ となり, 両列は共通の正の実数 $M(a_0, b_0)$ に 2 次収束する.

定理 1 (主定理)

$a_0 > b_0 > 0$ に対し

$$M(a_0, b_0) = \frac{a_0}{F(1/6, 1/2, 1; 1 - (b_0/a_0)^3)^2}.$$

M_1, M_2 は 1 次同次, すなわち $M_i(ca, cb) = cM_i(a, b)$. よって M も 1 次同次で, 漸化式から $M(a_0, b_0) = M(a_n, b_n)$ が成り立つ (シフト不変性).

楕円曲線の周期としての $F(x)$ I

$x \in (0, 1)$, $\lambda^3 = 1 - x$ ($0 < \lambda < 1$) とし, 種数 3 の巡回曲線 $C(x): w^6 = z^5(z - x)(z - 1)^3$ を考える. $t = w^2/(z^2(z - 1))$, $y = \sqrt{-1}xw/z^2$ とおくと $C(x)$ は超楕円曲線 $C_\lambda: y^2 = t(t^3 - \lambda^3)(t^3 - 1)$ と双有理同値で, 対合 $\iota(t, y) = (\lambda/t, \lambda^2 y/t^4)$ をもつ.

命題 2

ι -不変な正則微分は $\Omega = (t^2 - \lambda) dt/y$ が張り, $r = t + \lambda/t$, $u = y/t^2$ により商曲線は楕円曲線

$$E_\lambda: u^2 = r^3 - 3\lambda r - (1 + \lambda^3), \quad \text{pr}_\iota^*(dr/u) = \Omega.$$

B をベータ関数として

$G(x) = B(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})F(1/6, 1/2, 2/3; 1 - x) + B(\frac{5}{6}, \frac{1}{2})(1 - x)^{1/3}F(5/6, 1/2, 4/3; 1 - x)$
とおく. 次が成り立つように $H_1(C_\lambda, \mathbb{Z})^{\iota=1}$ の基底 α, β が取れる:

$$\int_\beta \Omega = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}F(x), \quad \tau(x) = \int_\alpha \Omega / \int_\beta \Omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \frac{G(x)}{F(x)}.$$

$\Omega = \text{pr}_\iota^*(dr/u)$ だから, E_λ の正則微分 dr/u の周期が $F(x)$ で表された.

Jacobi 型公式と 2τ 公式 I

$$\zeta_3 = e^{2\pi\sqrt{-1}/3},$$

$$a(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \zeta_3 \vartheta_{10}(\tau)^4, \quad b(\tau) = \vartheta_{00}(\tau)^4 + \zeta_3^2 \vartheta_{10}(\tau)^4$$

とおく. 周期写像 $x \mapsto \tau(x)$ の逆写像は $x = 1 - b(\tau)^3/a(\tau)^3$ で与えられる. テータ定数の 2 倍公式は

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{10}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 - \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}.$$

定理 3 (Jacobi 型公式 (Matsumoto 2022 参照))

$$\lambda = b(\tau)/a(\tau), \quad F(1 - \lambda^3)^2 = a(\tau).$$

定理 4 (2τ 公式)

上の 2 倍公式から

$$a(2\tau) = M_1(a(\tau), b(\tau)), \quad b(2\tau) = M_2(a(\tau), b(\tau)).$$

$\langle(1 + \lambda, 0)\rangle$ を核とする同種写像 ϕ_λ をとると, その行き先は $E_{\lambda'}$, $\lambda' = b(2\tau)/a(2\tau)$. すなわち $\tau \mapsto 2\tau$ が $\phi_\lambda: E_\lambda \rightarrow E_{\lambda'}$ で実現される.

共通極限 I

$a_0 > b_0 > 0$ に対し $\tau = \tau(1 - (b_0/a_0)^3)$ とおくと, Jacobi 型公式から $b_0/a_0 = b(\tau)/a(\tau)$. M の 1 次同次性を 2 度使って

$$M(a_0, b_0) = a_0 M(1, b_0/a_0) = a_0 M\left(1, \frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right) = \frac{a_0}{a(\tau)} M(a(\tau), b(\tau)).$$

2τ 公式を繰り返し用いると, $(a(\tau), b(\tau))$ を初期値とする反復の第 n 項は $(a(2^n\tau), b(2^n\tau))$ である. $\text{Im}(2^n\tau) \rightarrow \infty$ と, カスプ $\sqrt{-1}\infty$ におけるテータ定数の値 $\vartheta_{00} \rightarrow 1, \vartheta_{10} \rightarrow 0$ から $(a(2^n\tau), b(2^n\tau)) \rightarrow (1, 1)$. よって $M(a(\tau), b(\tau)) = 1$.

定理 5 (主定理)

$$M(a_0, b_0) = \frac{a_0}{F(1/6, 1/2, 1; 1 - (b_0/a_0)^3)^2} = \frac{a_0}{\vartheta_{00}(\tau)^4 + \zeta_3 \vartheta_{10}(\tau)^4}.$$

ϕ_λ は Vélu の公式 (Vélu 1971) で有理式として書け, その置換積分から $F(1 - (\lambda')^3) = \sqrt{M_1(1, \lambda)} F(1 - \lambda^3)$. これは逆写像を経由しない別証明を与える.

参考文献 I

-  Borwein, Jonathan M. and Peter B. Borwein (1998). *Pi and the AGM*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
-  Matsumoto, K. (2022). *Analogies of Jacobi's formula*. [arXiv: 2203.07617 \[math.CA\]](#).
-  Matsumoto, K. and R. Nakano (2026). “The algebro-geometric aspect of the iterated limit of a quaternary of means of four terms”. In: *International Journal of Mathematics*, 2650062.
-  Mumford, David (2007). *Tata lectures on theta. I*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
-  Silverman, Joseph H. (2009). *The Arithmetic of Elliptic Curves*. 2nd ed. New York: Springer.
-  Vélú, Jacques (1971). “Isogénies entre courbes elliptiques”. In: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 273, A238–A241.